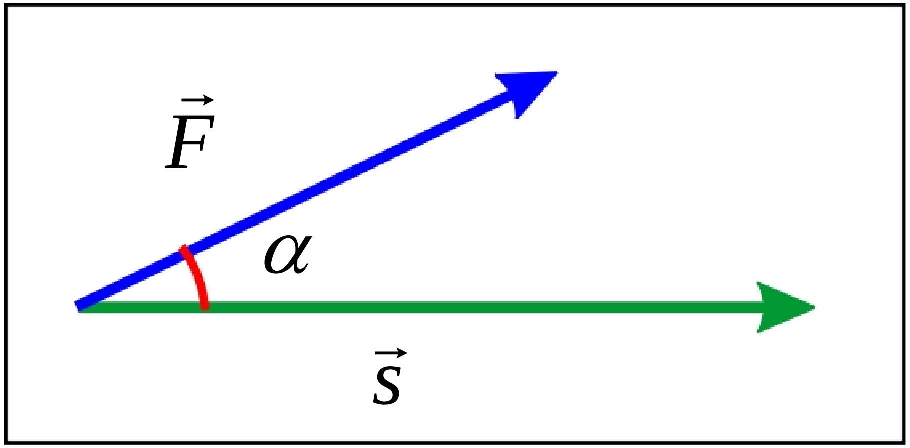
LAVORO

Se su un corpo agisce una forza ***F***, il lavoro compiuto dalla forza per uno spostamento ***s*** è (prodotto scalare di due vettori):

$$\boxed{L = F \cdot s \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

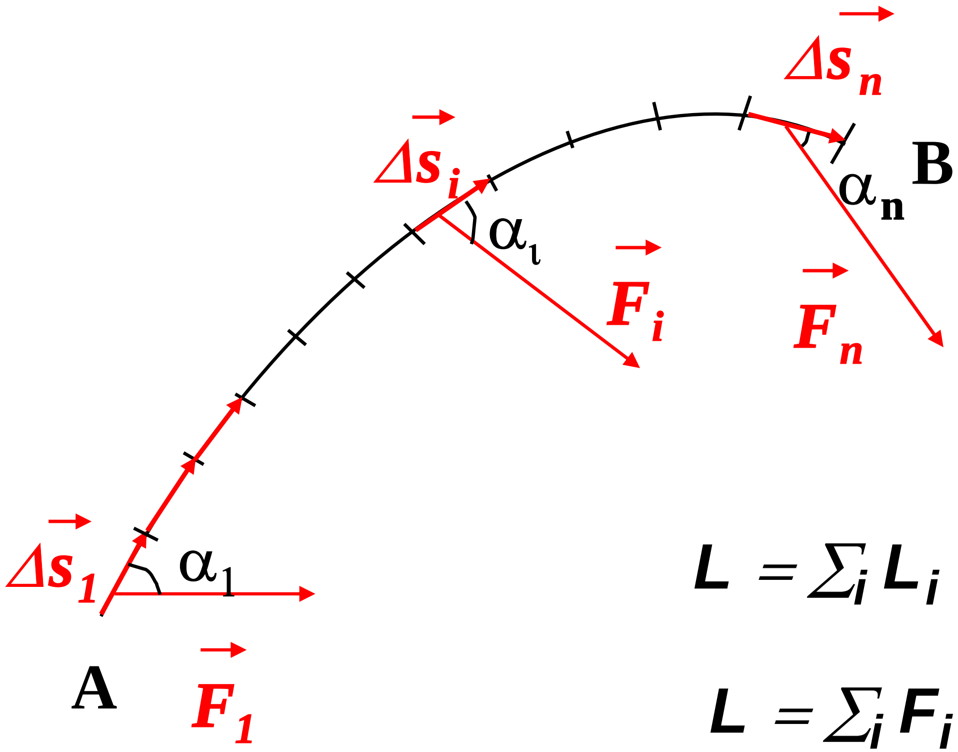


LAVORO

L'unità di misura del lavoro nel S.I. si chiama *Joule*: lavoro compiuto dalla forza di 1 N che si sposta di 1 m parallelamente alla direzione della forza.

$$J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

In generale se la forza non è costante e/o la traiettoria non è rettilinea:
dividiamo lo spostamento in tanti piccoli tratti di modulo Δs_i abbastanza piccoli da poter essere considerati rettilinei e da poter ritenere che la forza sia costante in ciascuno di essi.

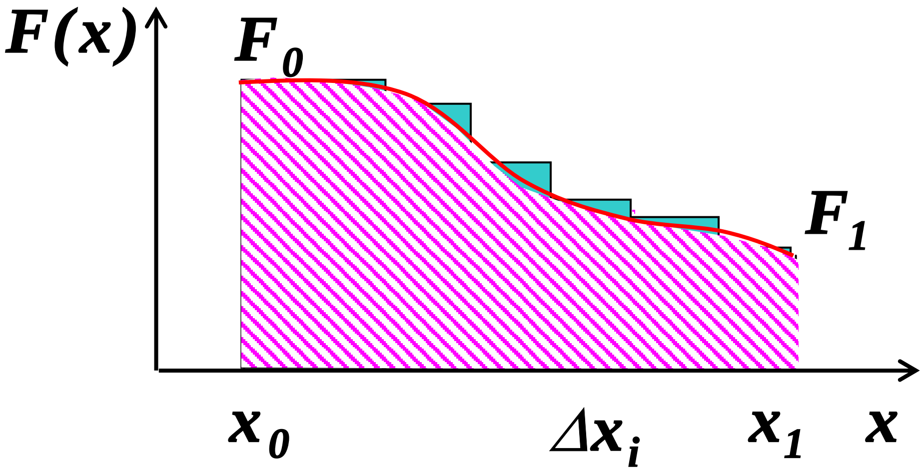


$$L = \sum_i L_i = \sum_i \vec{F}_i \times \Delta\vec{s}_i$$

$$L = \sum_i F_i \Delta s_i \cos\alpha_i$$

Rappresentazione grafica del lavoro

Esempio: *il moto avviene su una retta (asse x), la forza è parallela all'asse x e il suo modulo dipende dalla posizione.*



$$L_i = F_i \Delta x_i$$

$$L = \sum_i \vec{F}_i \times \Delta \vec{x}_i \qquad L = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i \vec{F}_i \times \Delta \vec{x}_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_i \Delta x_i$$

In un diagramma [F(x), x] il lavoro, limite della sommatoria per $\Delta x_i \Rightarrow 0$, è rappresentato dall'area della superficie sotta la curva.

Che effetto ha il lavoro?

$$L = \vec{F} \times \Delta\vec{s} = \vec{F}\Delta t \times \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \Delta\vec{q} \times \vec{v}_m = (m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1) \times \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) =$$

$$= \frac{1}{2}m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \frac{1}{2}m(v_2{}^2 - v_1{}^2) = \frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2$$

Dove: $\frac{1}{2}mv^2 = T$ **è l' <u>energia cinetica</u>.** $\boxed{\Delta T = L}$

In generale $T_{fin} - T_{in} = \Delta T = L = \sum_i \vec{F}_i \times \Delta\vec{s}_i$

N.B.: $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} = a^2 - b^2$

ENERGIA CINETICA

Il lavoro compiuto dalle forze agenti su un corpo per portare la sua velocità da v_1 a v_2 è pari alla variazione di energia cinetica.

$$L = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1$$

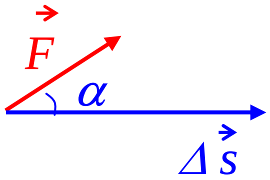
$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Energia cinetica

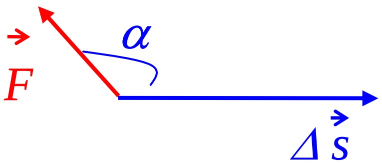
Dunque a causa dell'interazione la particella scambia energia con l'ambiente esterno:

$$L = \vec{F} \times \Delta\vec{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha \qquad L = \Delta T$$

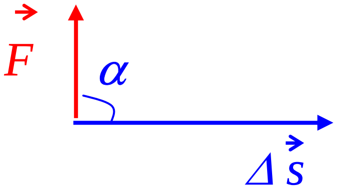
Se $\alpha < 90°$ $\quad L>0 \quad T_2 > T_1$



Se $\alpha > 90°$ $\quad L<0 \quad T_2 < T_1$



Se $\alpha = 90°$ $\quad L=0 \quad T_2 = T_1$



POTENZA

Velocità con cui una particella scambia energia con gli oggetti con i quali interagisce.

Se Δt è sufficientemente piccolo da poter ritenere costante la forza e rettilineo lo spostamento:

$$W = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t} = \vec{F} \times \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \times \vec{v}_m$$

dimensioni: $\left[M L^2 T^{-3} \right]$

unità di misura: W (watt) = J/s

CONCETTO DI CAMPO

CAMPO SCALARE

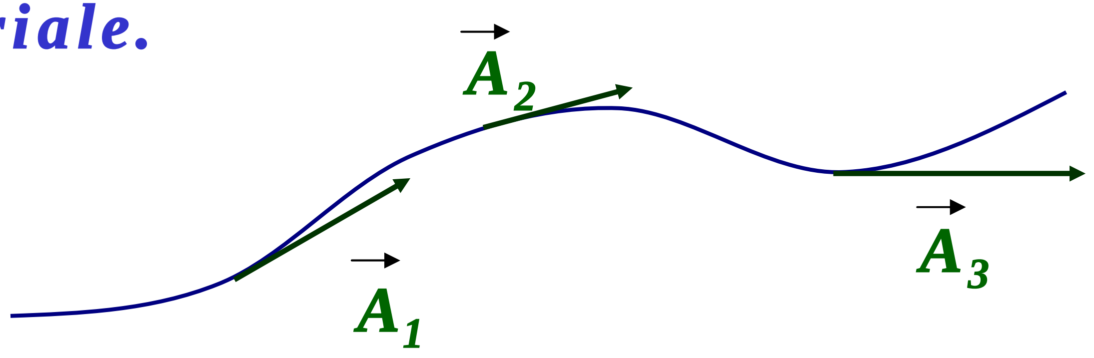
Regione di spazio in cui ad ogni punto è associato il valore di una grandezza scalare.

Superficie di livello : luogo dei punti in cui il valore della grandezza scalare è costante.

CAMPO VETTORIALE

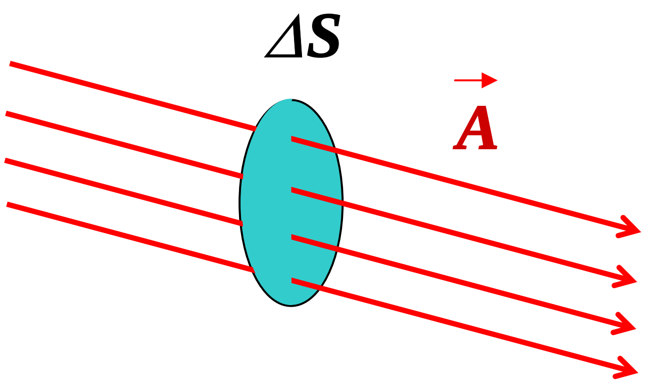
Regione di spazio in cui ad ogni punto è associata una grandezza vettoriale.

Linea di campo:



Convenzione di Faraday

Consideriamo una piccola superficie piana; il vettore sia costante in ogni suo punto e perpendicolare alla superficie.



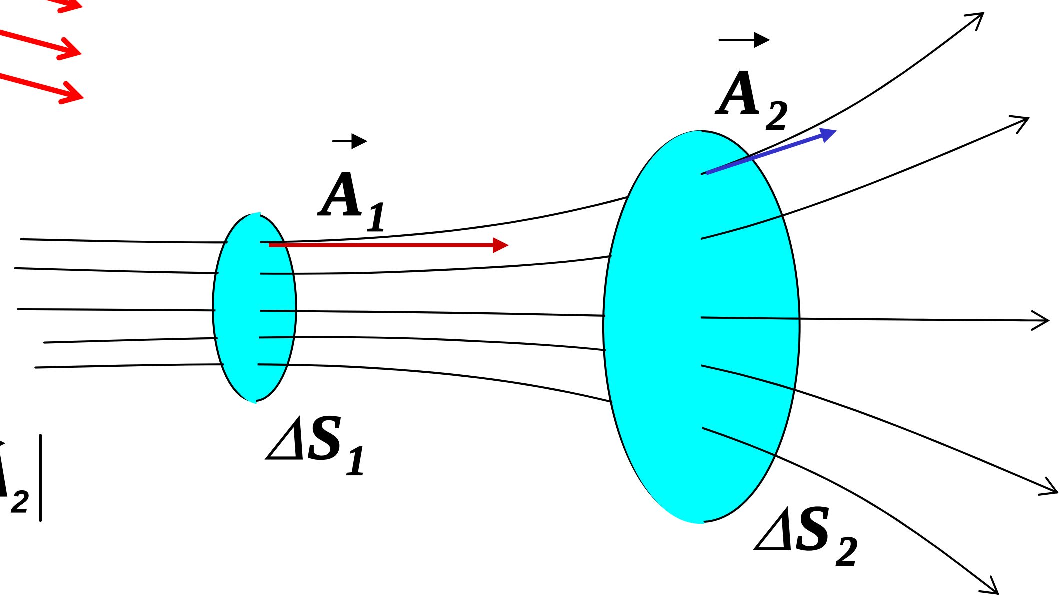
Tracciamo un numero di linee di campo pari a:

$$N = k \cdot A \cdot \Delta S$$

$$A_1 \Delta S_1 = A_2 \Delta S_2$$

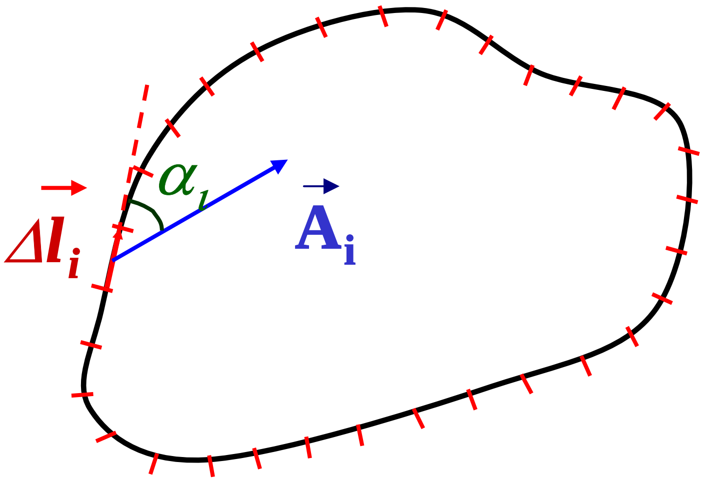
$$\Delta S_1 < \Delta S_2$$

$$N_1 = N_2 \qquad \left|\vec{A}_1\right| > \left|\vec{A}_2\right|$$



La convenzione di Faraday permette una visione immediata dell'andamento del campo.

CIRCUITAZIONE



Consideriamo nel campo vettoriale una linea ideale chiusa.

La dividiamo in tanti piccoli tratti di modulo Δl_i abbastanza piccoli da poter essere considerati rettilinei e da poter ritenere che il vettore del campo sia costante in ciascuno di essi.

$$C_l(\vec{A}) = \sum_i A_i \Delta l_i \cos\alpha_i = \sum_i \vec{A}_i \times \vec{\Delta l}_i$$

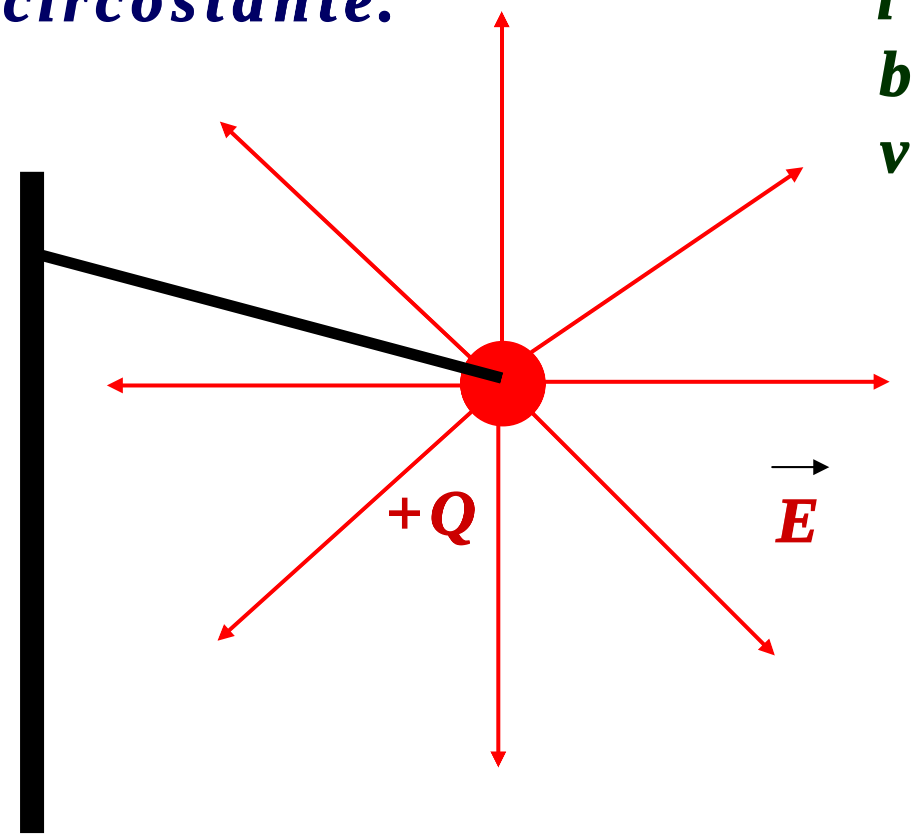
Se il campo vettoriale è un campo di forze, la circuitazione della forza calcola il lavoro su traiettoria chiusa.

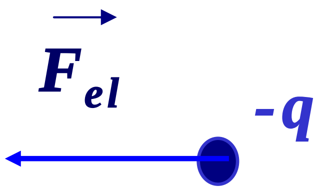
CAMPO DI FORZE

Interazione tra due particelle → ***Interazione campo - particella***

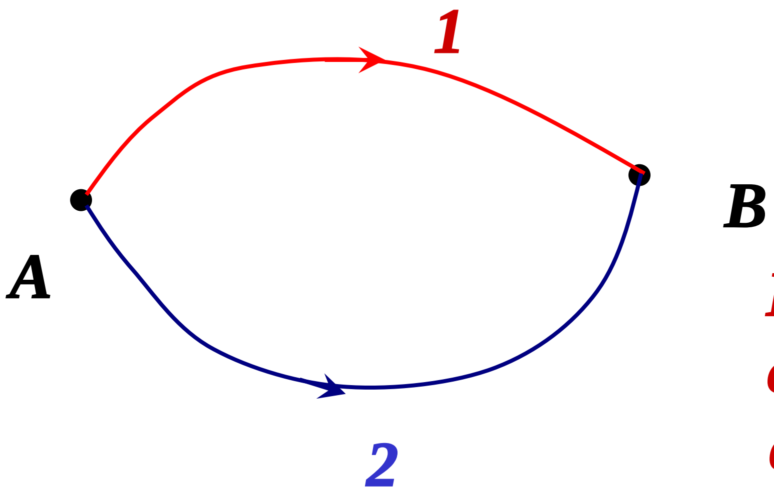
Una particella modifica le proprietà dello spazio circostante.

Un'altra particella omogenea con la prima "sente" l'esistenza della perturbazione, che si propaga con velocità finita.





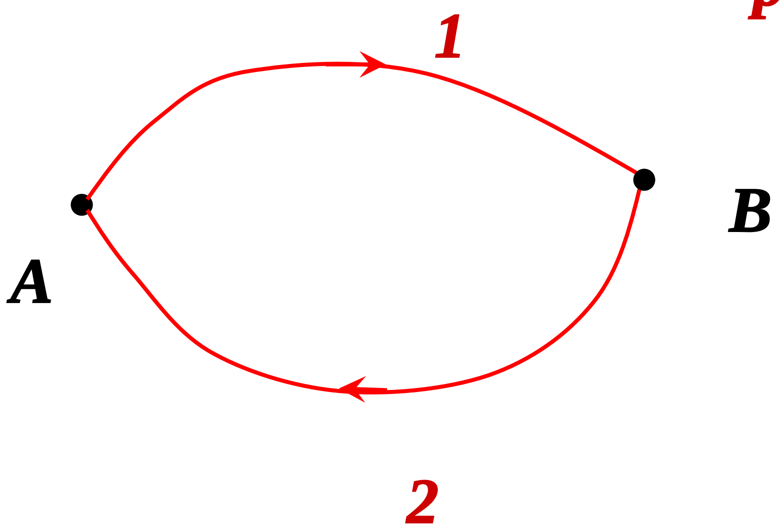
CAMPO DI FORZE CONSERVATIVE



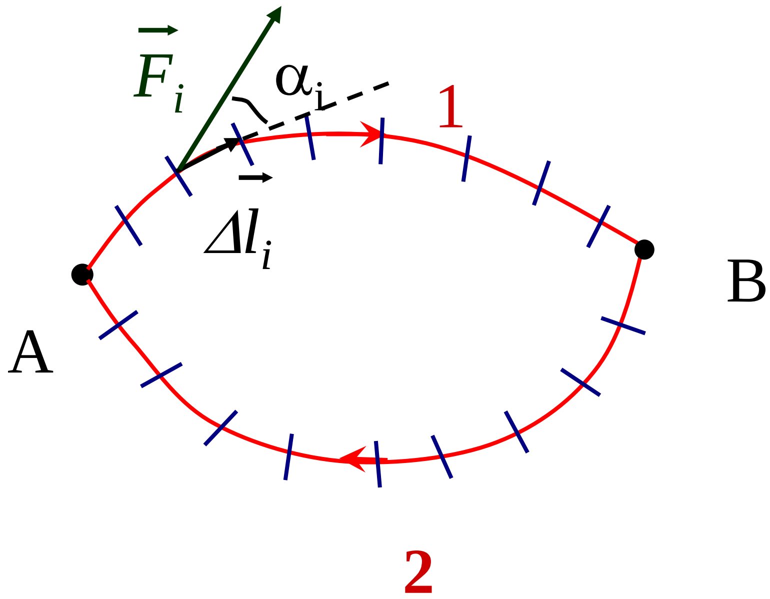
$$L_{AB} = \sum_{1}^{n} \vec{F}_i \times \Delta \vec{l}_i$$

In un campo di forze conservative il lavoro non dipende dalla traiettoria ma solo dal punto iniziale e dal punto finale.

$$L_{A1B} = L_{A2B}$$



Se calcoliamo il lavoro su traiettoria chiusa, sul percorso A1B2A, otteniamo la circuitazione della forza conservativa.



Calcoliamo la circuitazione della forza conservativa:

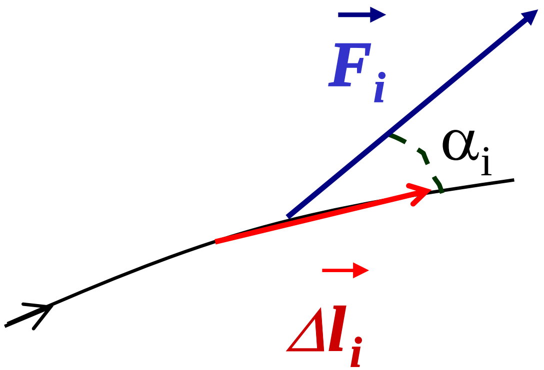
$$C_l(\vec{F}) = \sum_i \vec{F}_i \times \vec{\Delta l}_i = L_{A1B2A} = L_{A1B} + L_{B2A}$$

ma $L_{B2A} = -L_{A2B}$

$$C_l(\vec{F}) = L_{A1B} - L_{A2B} = 0$$

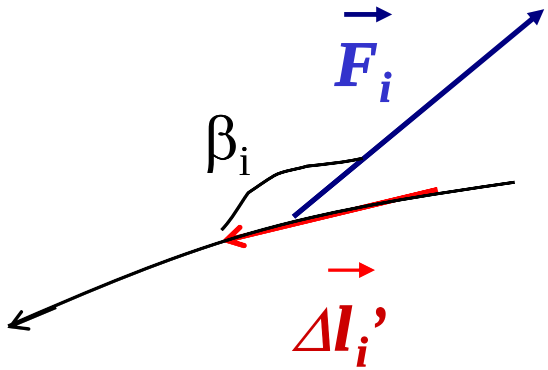
La circuitazione di una forza conservativa è nulla

$$L_{B2A} = -L_{A2B} \quad ?$$



Percorso A2B

$$L_i = \vec{F}_i \times \Delta\vec{l}_i = F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos\alpha_i$$



Percorso B2A

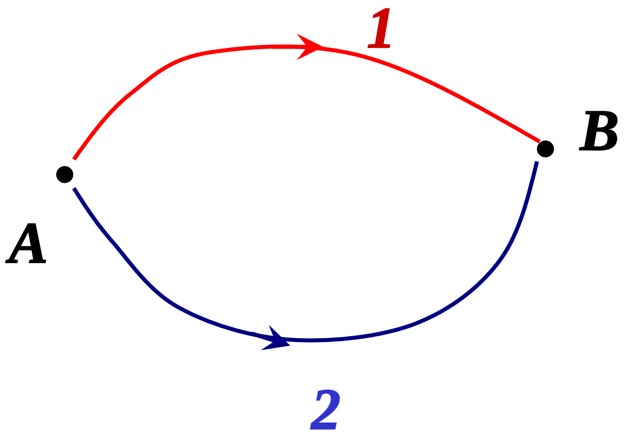
$$L_i' = \vec{F}_i \times \Delta\vec{l}_i' = F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos\beta_i =$$

$$= -F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos\alpha_i = -L_i$$

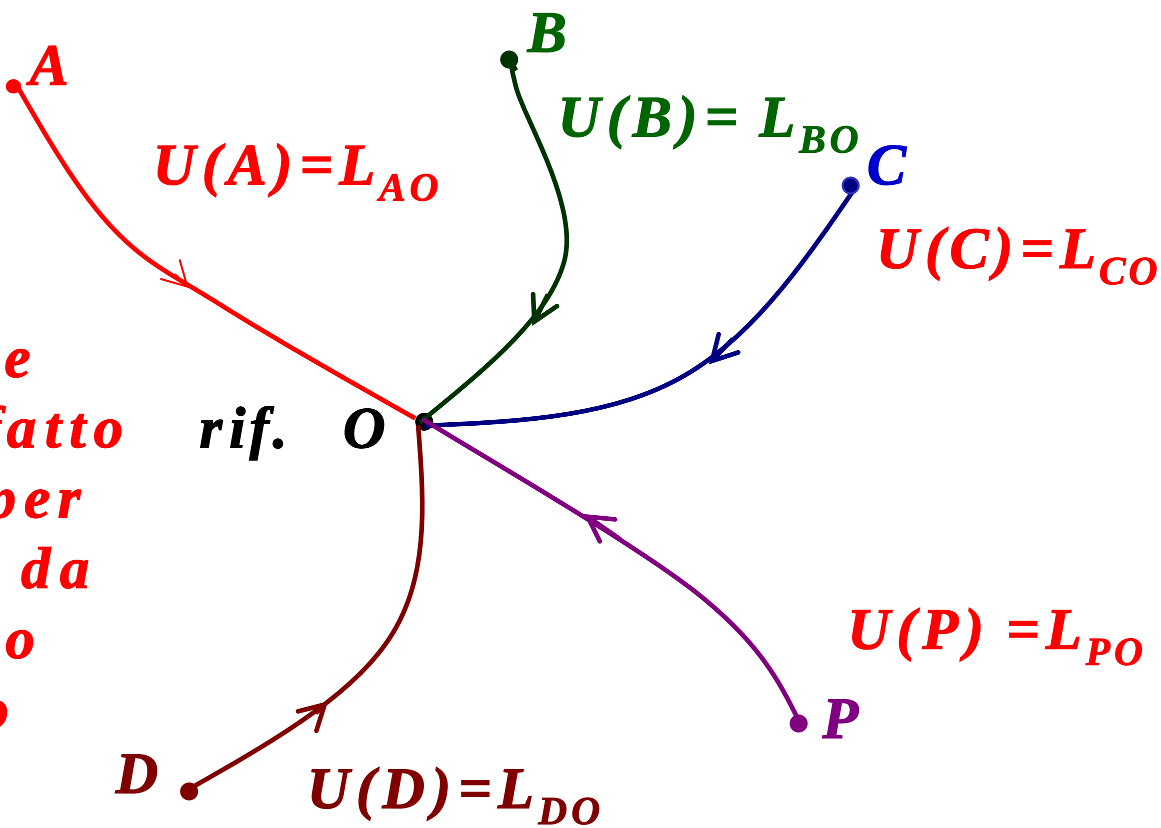
infatti: $\beta_i = \pi - \alpha_i$

Lungo il percorso B2A tutti i lavori i-esimi sono opposti ai corrispondenti del percorso A2B.

Campo di forze conservative - Energia potenziale



$$L_{A1B} = L_{A2B} \qquad C_l(\vec{F}) = \sum_i \vec{F}_i \times \Delta\vec{l}_i = 0$$



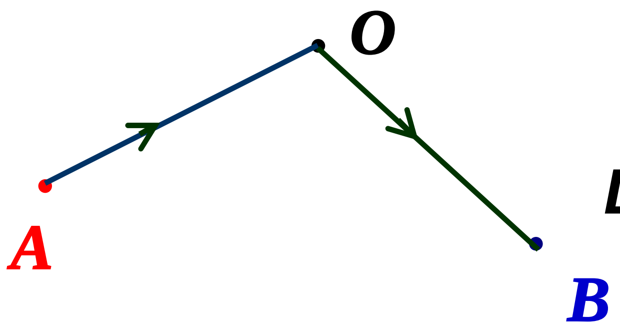
Scelto un punto O come riferimento, il lavoro fatto dalle forze del campo per portare una particella da un punto al riferimento dipende solo dal punto iniziale.

Associamo a ciascun punto il valore della energia potenziale della particella, misurata dal lavoro L_{PO}.

Abbiamo così definito un campo scalare con corrispondenza biunivoca tra i punti del campo e i valori dell'energia potenziale.

Il riferimento è arbitrario, ma....

Calcoliamo il lavoro fatto delle forze del campo per portare una particella da A a B; scegliamo un percorso che passa per il riferimento O:



$$L_{AB} = L_{AO} + L_{OB}$$

$$L_{AB} = L_{AO} - L_{BO} = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

$L_{AB} = -\Delta U$ **non dipende dal riferimento scelto**

Cambiando il riferimento tutte le energie potenziali cambiano di un addendo $L_{OO'}$, ma le differenze non cambiano.

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Particella in moto in campo conservativo

$\Delta T = L$ valida per qualunque forza

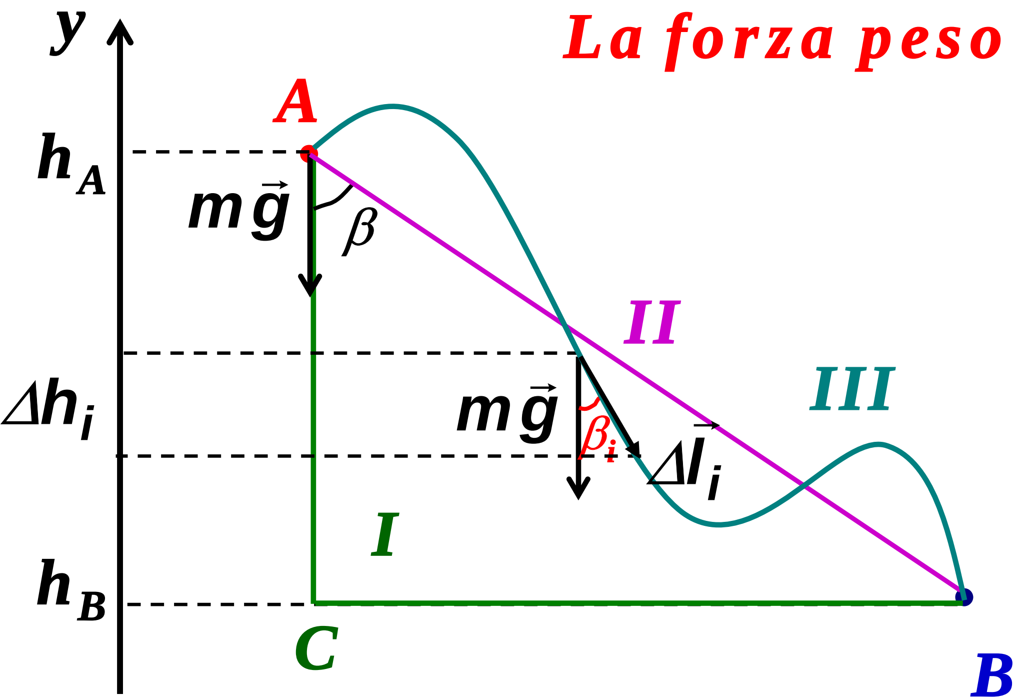
$L = -\Delta U$ valida per forze conservative

$\Delta T = -\Delta U$ $\quad \Delta T + \Delta U = 0$ $\quad \Delta(T + U) = 0$ $\quad T + U = cost$

$$\boxed{E = T + U = cost}$$

L'energia meccanica totale, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, si conserva quando una particella si muove in un campo di forze conservative.

La forza peso è conservativa



Percorso I:

$$L_{ACB} = L_{AC} + L_{CB}$$

$$L_{AC} = mg(h_A - h_B)$$

$$L_{CB} = m\vec{g} \times \overrightarrow{CB} = 0$$

$$L_{ACB} = L_I = mg(h_A - h_B)$$

II $\quad L_{AB} = m\vec{g} \times \overrightarrow{AB} = mg \cdot AB \cdot \cos\beta = mg(h_A - h_B)$

III $\quad L_{AB} = \sum_i m\vec{g} \times \Delta\vec{l}_i = \sum_i mg \cdot \Delta l_i \cdot \cos\beta_i =$

$$= mg \sum_i \Delta l_i \cdot \cos\beta_i = mg \sum_i \Delta h_i = mg(h_A - h_B)$$

Il lavoro della forza peso non dipende dalla traiettoria, quindi la forza peso è conservativa.

In prossimità della superficie terrestre:

scelto il riferimento h = 0, l'energia potenziale gravitazionale è:

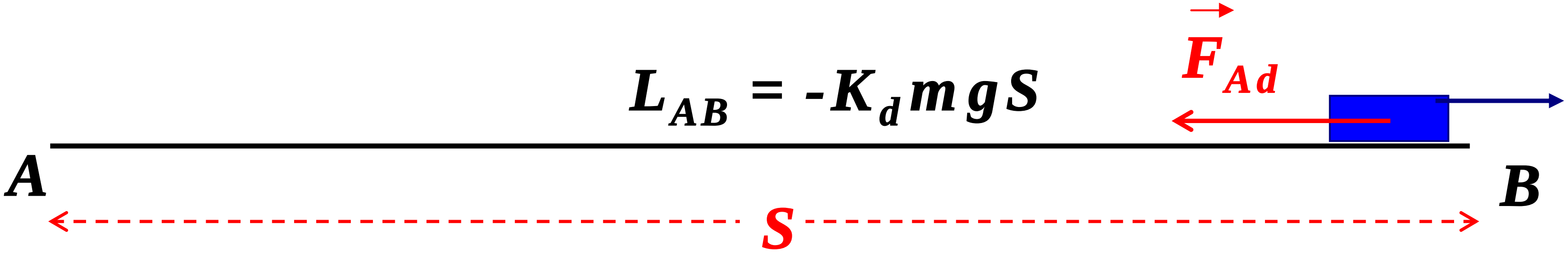
$$U = mgh$$

L'energia meccanica totale di una particella (in assenza di forze di attrito) si conserva:

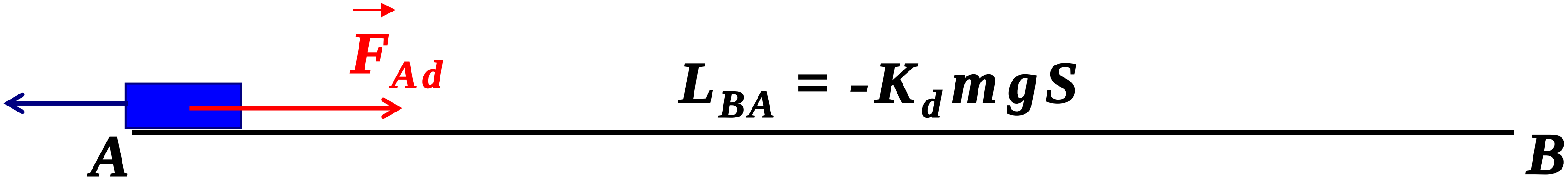
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + mgh = cost$$

La forza di attrito non è conservativa

$$L_{AB} = -K_d m g S$$



$$L_{BA} = -K_d m g S$$



$$L_{ABA} = C_l(\vec{F}_{Ad}) = L_{AB} + L_{BA} = -2K_d m g S$$

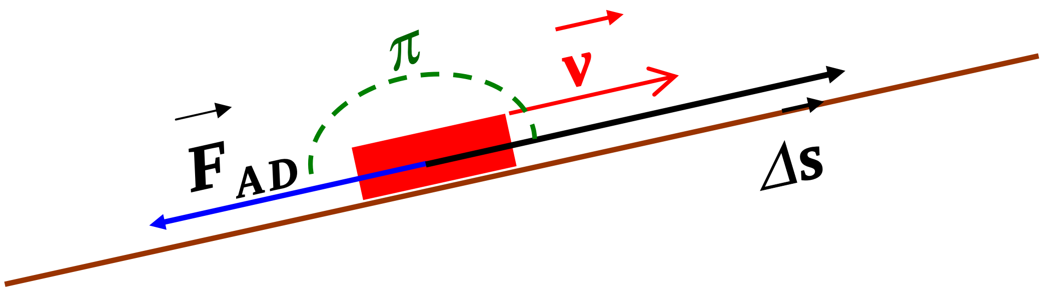
Se sono presenti anche forze non conservative:

$$\Delta T = L = L_{cons} + L_{noncons}$$

$$\Delta T = -\Delta U + L_{noncons} \qquad \Delta(T + U) = L_{noncons}$$

$$\boxed{\Delta E = L_{noncons}}$$

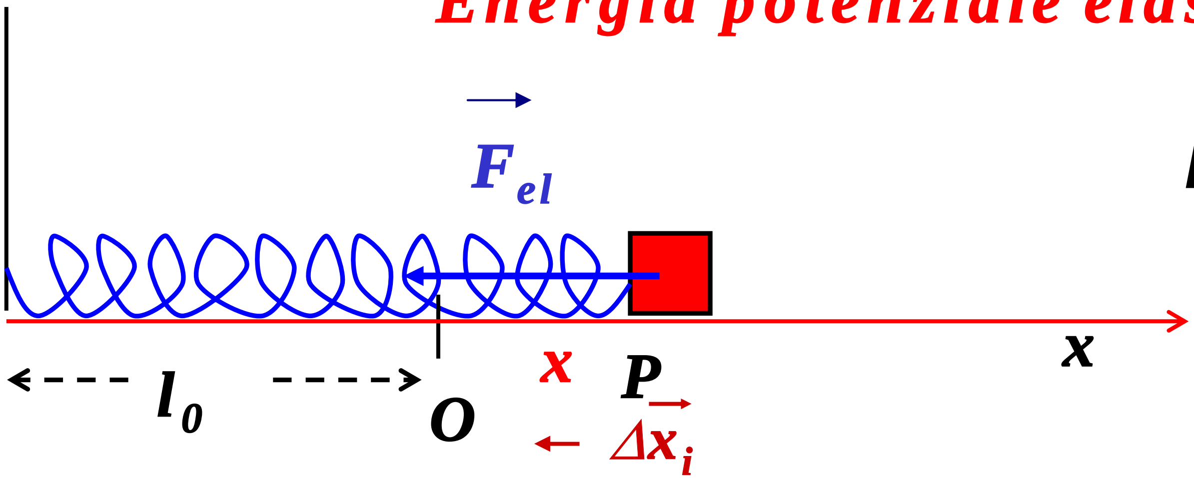
Esempio: moto con attrito in campo gravitazionale:



$$\Delta E = L_{AD} = \vec{F}_{AD} \times \Delta\vec{s} = F_{AD} \cdot \Delta s \cdot \cos\pi = -F_{AD} \cdot \Delta s$$

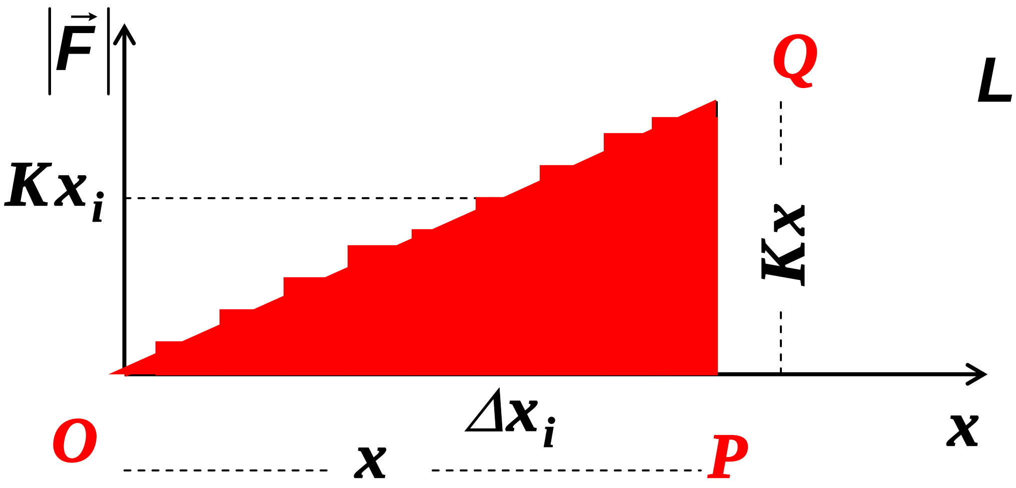
$$\Delta T = -\Delta U - F_{AD} \cdot \Delta s \qquad \Delta E = -F_{AD} \cdot \Delta s$$

Energia potenziale elastica



$$\vec{F}_{el} = -K\vec{x}$$

$$L_{PO} = \sum_i \vec{F}_i \times \Delta\vec{x}_i = \sum_i F_i \Delta x_i = \sum_i K x_i \cdot \Delta x_i$$



$$L_{PO} = \boxed{\lim_{\Delta x \to 0}} \boxed{\sum_i \boxed{K x_i \Delta x_i}} = \frac{1}{2} K x^2$$

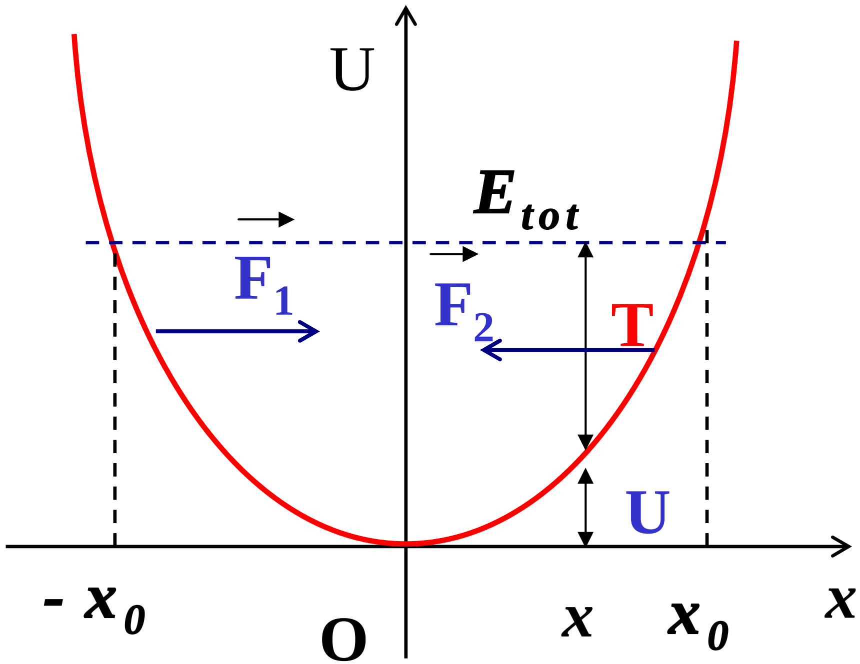
Riferimento in O, punto di equilibrio (lunghezza a riposo della molla).

Energia potenziale elastica $\quad U = \dfrac{1}{2} K x^2$

Energia potenziale elastica

$$U(P) = \frac{1}{2}Kx^2 = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i K x_i \Delta x_i$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}Kx_0^2 = U_{max}$$



$$E_t = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2 = U_{max}$$

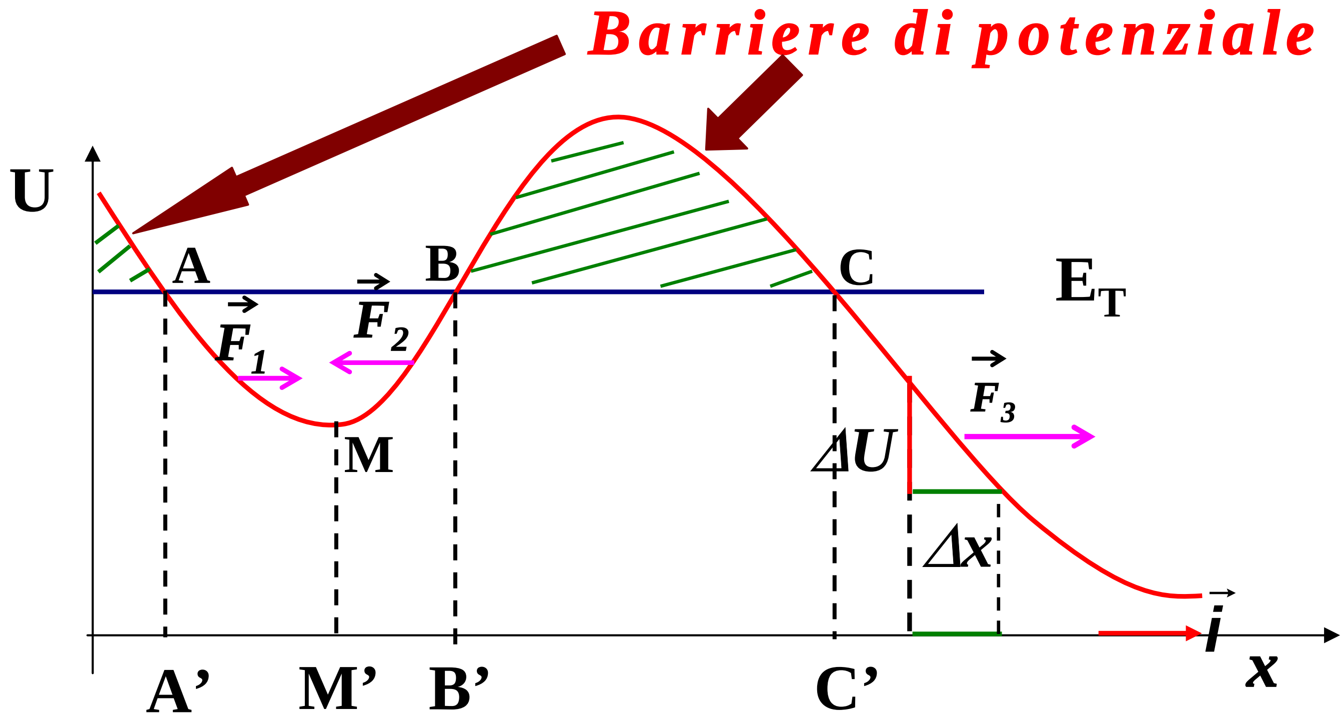
La velocità massima è raggiunta in O (lunghezza della molla pari alla lunghezza a riposo, forza elastica nulla):

$$T_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = E_t = U_{max} = \frac{1}{2}Kx_0^2$$

Per forze parallele allo spostamento e Δx piccoli si ha:

$L = F\Delta x$ $\quad$ $L = -\Delta U$ $\quad$ $F = -\dfrac{\Delta U}{\Delta x}$ $\quad$ ***La forza è di richiamo.***

La particella si muove lungo l'asse x, sotto l'azione di una forza $\vec{F}(x)$ parallela all'asse x (o antiparallela)



$$E = T + U$$

$$T > 0$$

$$E - U > 0$$

$$U \leq E$$

$$L = F \cdot \Delta x = -\Delta U \qquad F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \qquad \vec{F} = -\frac{\Delta U}{\Delta x}\vec{i}$$

La forza in un punto è l'opposto della pendenza della curva U(x).

In M' l'energia potenziale è minima e la particella è in equilibrio stabile.

In M: $\left|\vec{F}\right| = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = 0$