retta

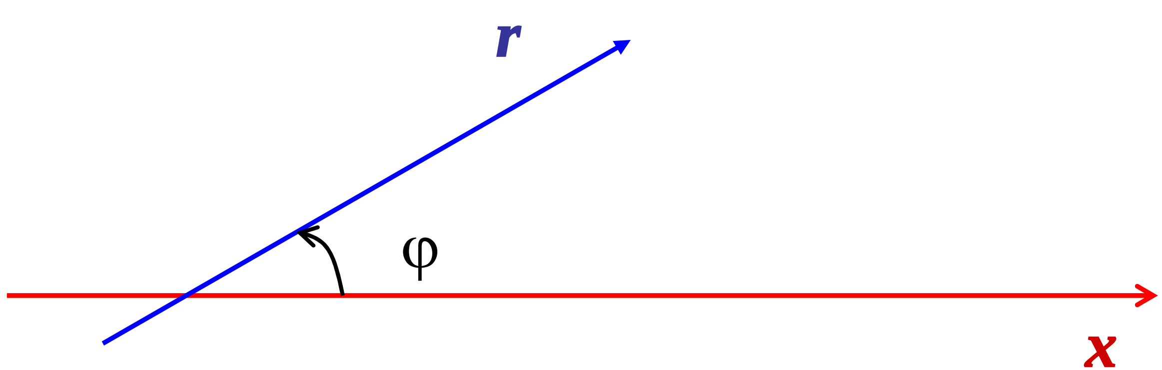
retta orientata

PER INDIVIDUARE UN ASSE r NEL PIANO:

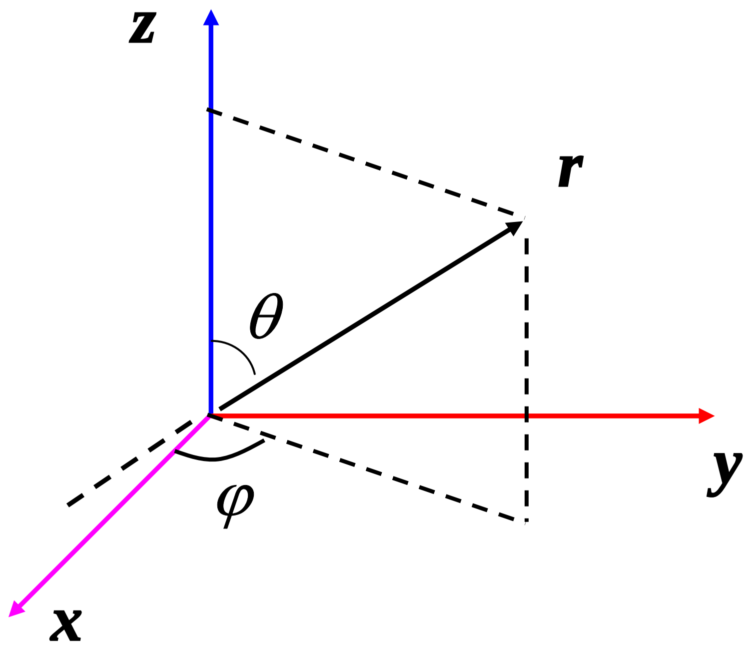
-fissiamo un asse di riferimento

-fissiamo un verso positivo di rotazione: quello antiorario

-l'angolo φ tra l'asse di riferimento e l'asse r è sufficiente per individuare l'asse r

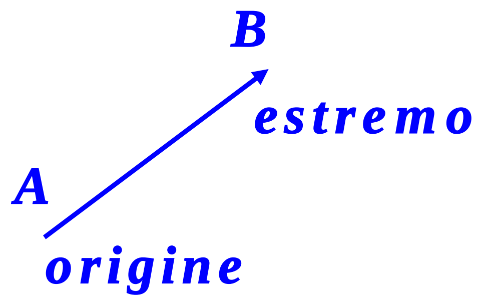


Per individuare un asse orientato r nello spazio sono necessari due angoli:
θ che r forma con l'asse z e φ che r forma con l'asse x

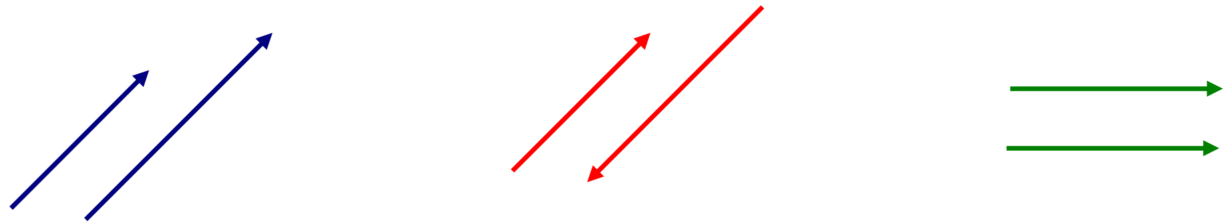


SEGMENTO ORIENTATO

Individua un punto (origine), una direzione, un verso, un modulo (la misura).



SEGMENTI ORIENTATI

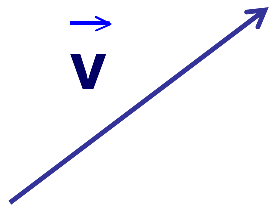


CONCORDI ***DISCORDI*** ***EQUIPOLLENTI***

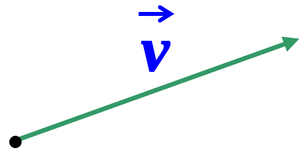
VETTORI

L'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti ad un segmento orientato dato si dice "vettore":

Il vettore individua la direzione, il verso, il modulo, ma non l'origine.



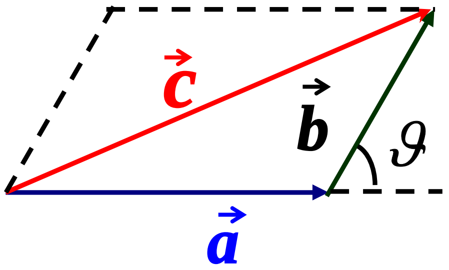
Se è assegnata anche l'origine si ottiene un vettore applicato.

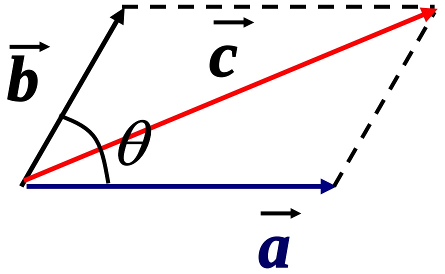


OPERAZIONI SUI VETTORI

SOMMA O RISULTANTE

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$





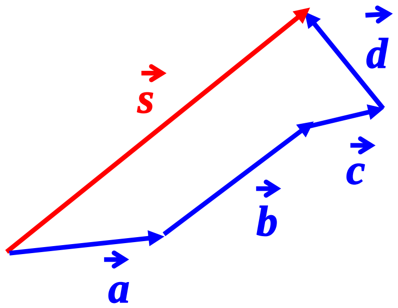
per la proprietà commutativa:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Il modulo del vettore somma vale:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \vartheta)}$$

Somma di più vettori



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

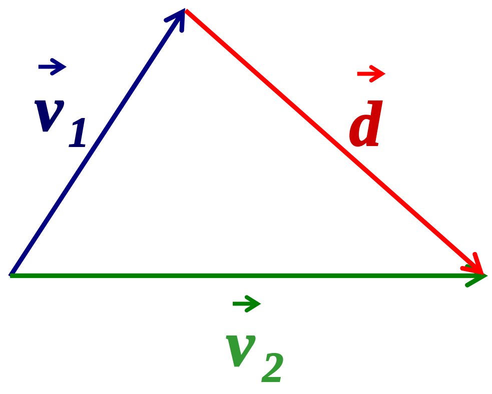
Se la poligonale è chiusa la somma è nulla.

Differenza di due vettori

$$\vec{d} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$\vec{d}$ *è il vettore che sommato a* $\vec{v}_1$ *riproduce* $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{d}$$



Prodotto di un vettore per un numero.

$\vec{v} = m\vec{u}$ *ha la stessa direzione di* $\vec{u}$ *, stesso verso se m è positivo, verso opposto se m è negativo, modulo uguale al prodotto del valore assoluto di m per il modulo di* $\vec{u}$*.*

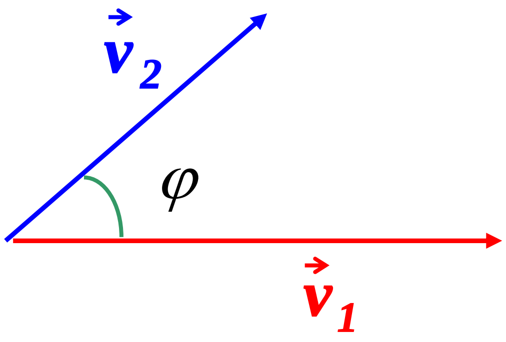
In particolare se $\vec{i}$ *è un versore, cioé un vettore con modulo unitario e con la stessa direzione e verso del vettore* $\vec{v}$ *e v è il modulo del vettore , si può scrivere:*

$$\vec{v} = v\vec{i}$$

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\varphi$$

Se $\varphi = 0$ $\quad \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = v_1 v_2$



Se $\varphi = \pi$ $\quad \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -v_1 v_2$

Se $\varphi = \pi/2$ $\quad \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$

Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa:

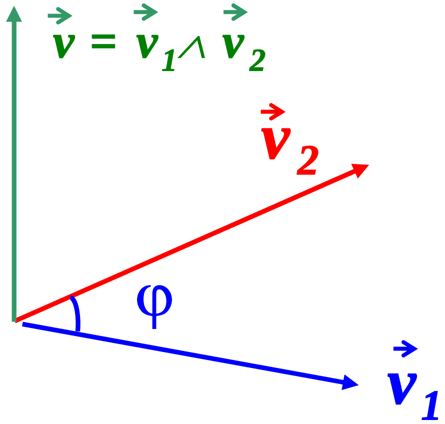
$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_1$$

Prodotti notevoli

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{b} = a^2 - b^2$$

PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$$



- modulo $v = v_1 v_2 \, \mathrm{sen}\, \varphi$

- direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori e

- verso stabilito con la regola della mano destra (pollice lungo il primo vettore, indice lungo il secondo: il medio indica il verso del vettore prodotto).

Se $\varphi = 0$, oppure $\varphi = \pi$ $\quad \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$

Se $\varphi = \pi/2$ $\quad v = |\vec{v}| = |\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \, \mathrm{sen} \frac{\pi}{2} = v_1 v_2$

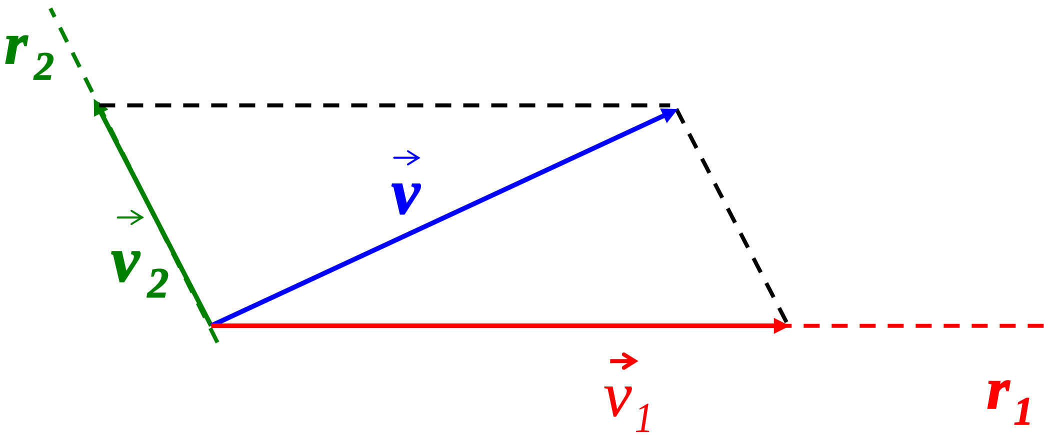
Non gode della proprietà commutativa:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$$

Scomposizione di un vettore

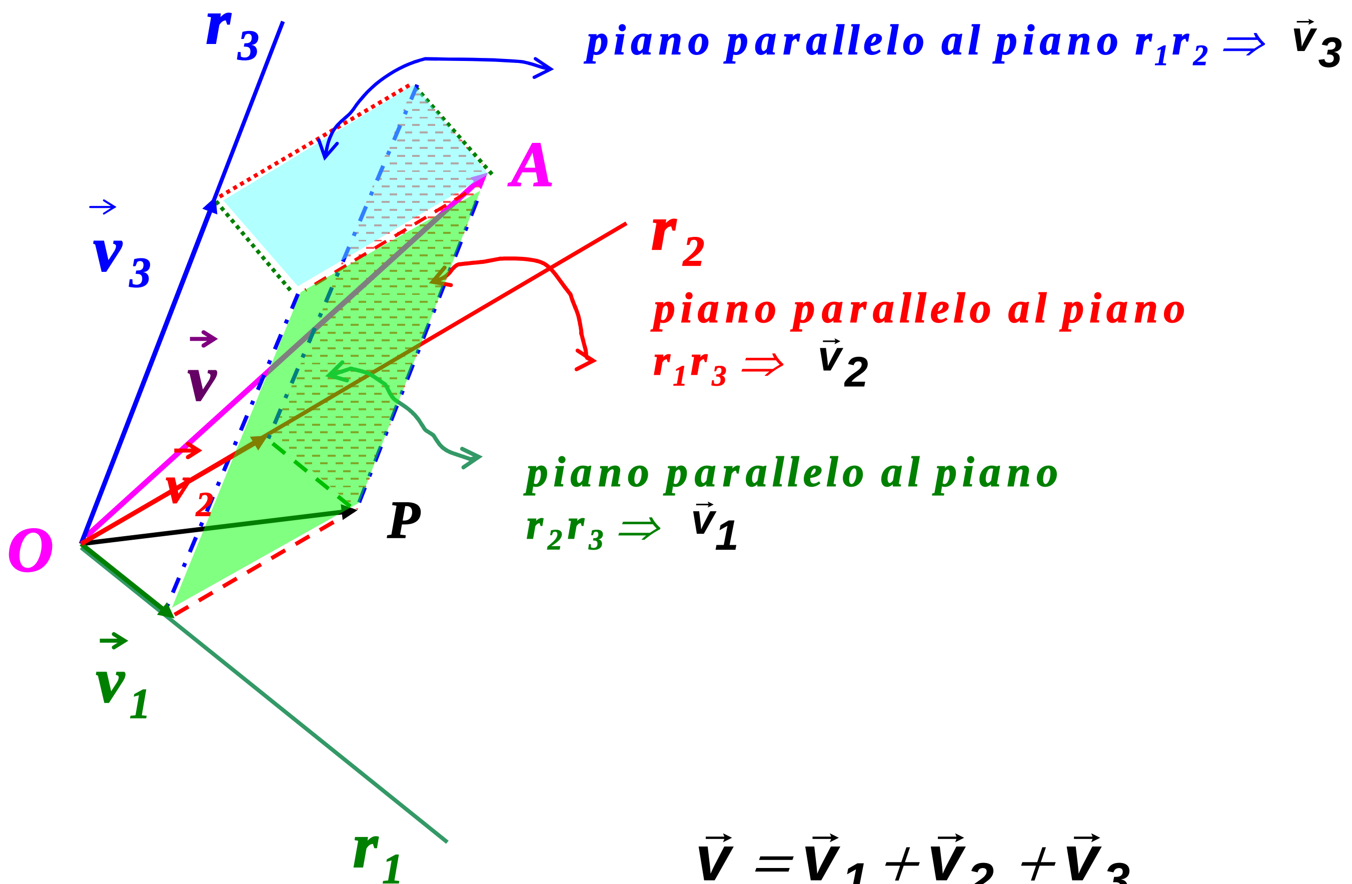
Si può fare in infiniti modi.

Nel piano, secondo due rette incidenti date:



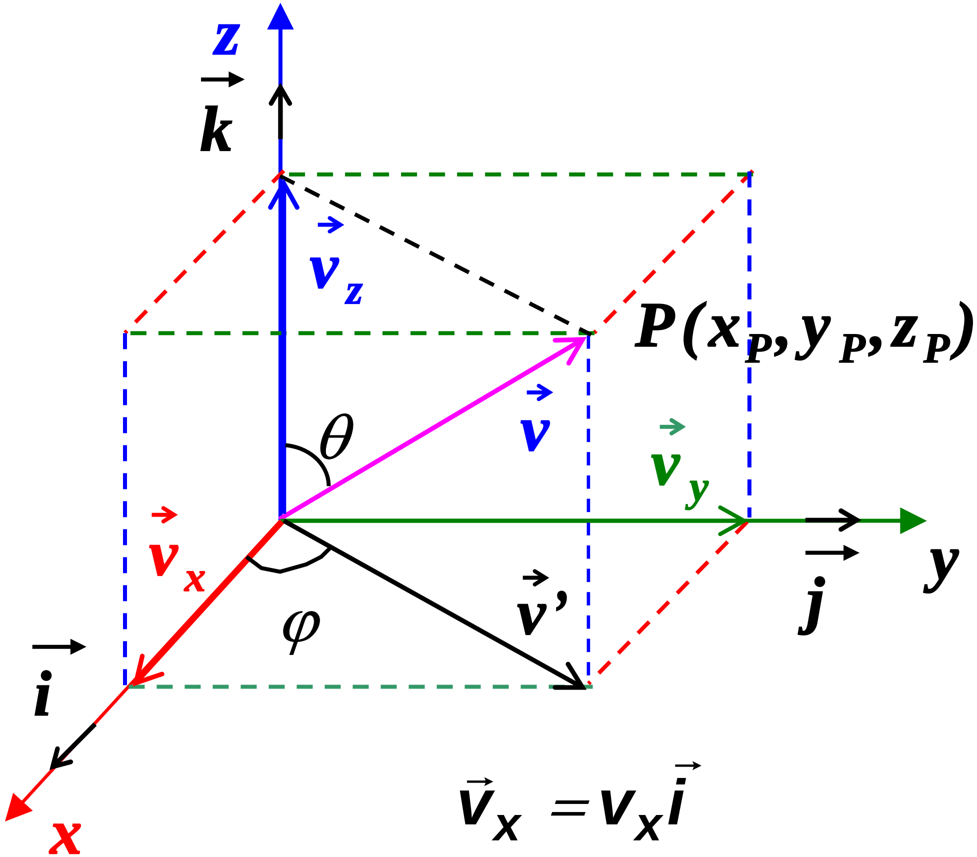
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

Nello spazio secondo tre rette incidenti non complanari:



$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DI UN VETTORE



$$v_z = v\cos\vartheta$$

$$v' = v\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$v_x = v'\cos\varphi = v\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\varphi$$

$$v_y = v\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\vec{v}_x = v_x\vec{i}$$

$$\vec{v}_y = v_y\vec{j}$$

$$\vec{v}_z = v_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_z = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$(v_x, v_y, v_z) \equiv (x_P, y_P, z_P)$$

$$\vec{v} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}$$

DATI DUE VETTORI:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

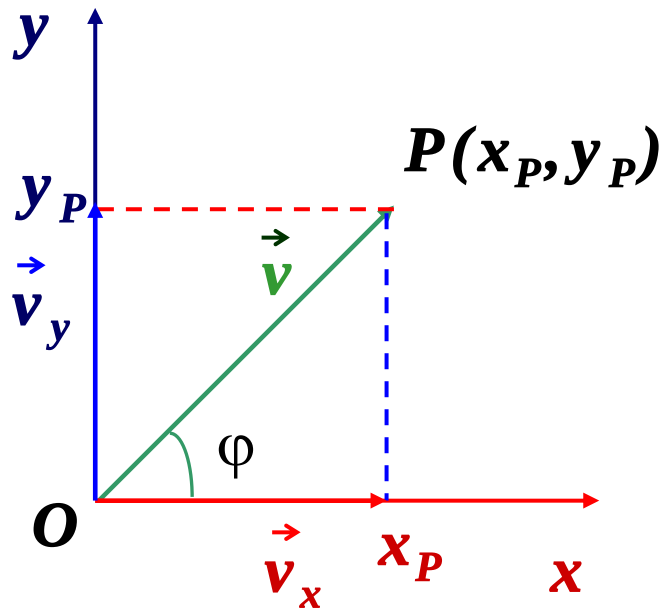
$$\vec{a} \times \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Decomposizione di un vettore su un piano cartesiano xy

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{v} = x_P \vec{i} + y_P \vec{j}$$



dove:

$$v_x = v \cos \varphi$$
$$v_y = v \,\mathrm{sen}\, \varphi$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$